Homotopie

The Author

April 8, 2020

1 connexité par arc

Considèrons E espace topologique

1.1 Définition

On appelle chemin dans E tout application continue $f : [0,1] \longrightarrow E$. $f(0)$ est l origine et $f(1)$ l'extrimité.

On dit aussi que $f(0)$ et $f(1)$ sont les extrimites du chemin.

Remarque 1. *Le choix de* $[0,1]$ *pour défini un chemin est justifer par le faite que tout intervalle de la forme* $[a,b]$ *est homéomorphe à* $[0,1]$.

- *En effet; soit*

$$\begin{gathered} f : [0,1] \longrightarrow E \\ t \to f(x) = \tfrac{x-a}{b-a} = \tfrac{1}{b-a}x - \tfrac{a}{b-a} \end{gathered}$$

L'application f est bijective, continue et f^{-1} *est continue.*

1.2 Définition

On appelle chemin généralisé dans un espace topologique E tout application continue $f : [a,b] \longrightarrow E$. $f(a)$ est l'origine et $f(b)$ l'extrimité.

On dit aussi que $f(a)$ et $f(b)$ sont les extrimites du chemin.

1.3 Définition

Un espace topologique E est dit connexe par arc si pour tout $(x,y) \in E \times E$ il existe un chemin $f : [0,1] \longrightarrow E$ tel que : $f(0) = x$ est l'origine et $f(1) = y$ l'extrimité.

Le chemin f est dans E est exprimé dans la définition par le faite que $f([0.1])$ est une partie de E.

Théorème 1. *(recollement)*
Soit E *unespace topologique et* $(E_i)_{i\in I}$, *une famille de parties fermmées de* E *oú* I *est finie et* $(f_i)_{i\in I}$ *une famille d'applications continues.* $f_i : E_i \longrightarrow F$ *oú* F *est un espace topologique lel que:*

1) $E = \underset{i\in I}{\cup} F_i$.
2) $f_i = fj$ *sur* $E_i \cap E_j$.

Alors; l'application $f : E \longrightarrow F$ *donnée par* $f = f_i$ *sur* E_i, *pour tout* $i \in I$, *est une application continue.*

Démonstration 1.

Exercice en T.D.

Proposition 1.

Soit E un espace topologique oú x, y sont lies par un chemin f et y, z sont lies par un chemin g, tout les deux chemins dans E. Alors il existe un chemin qui lie x á z.

Démonstration 2.

Considèrons l'application $\psi(t) = \begin{cases} f(2t) & si\ 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g(2t-1) & si\ \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$.

ψ est continue car foh_1 et goh_2 sont continue respctivement sur $[0, \frac{1}{2}]$ et $[\frac{1}{2}, 1]$ oú $h_1 = 2x$ et $h_2 = 2x - 1$ et $f(1) = g(2)$ et comme $[0, \frac{1}{2}]$ et $[\frac{1}{2}, 1]$ est une bipartition fermée d'après le théorème de recollement on a ψ est continue.

Lemme 1.

Si E et F deux espaces connexes par et si $E \cap F$ diffèrent de l'essemble vide . Alors $E \cup F$ est connxe par arc.

Démonstration 3.

Le probelrme suppose lorque $x \in E \setminus F$ et $z \in F \setminus E$.

Considèrons $y \in E \cap F$ donc il existe dans E un chemin f joignant x à y, et il existe un chemin dans F joigant y à z. D'après la proposition ci-dessus, il existe un chemin dans $E \cup F$ qui joigne x à z.

Proposition 2.

Si E un espace topologique, x_0 un point de E. L'ensemble

$C(x_0) = \{x \in E$ telque x et x_0 sontjoignes par un chemin$\}$ est un espace connexe par arc et autre part il est le plus grand connexe par arc qui contient x_0.

$C(x_0)$ s'appele compsante connexe de x_0.

Démonstration 4.

Exercice en T.D.

Exercice 1.

Soit E un espace topologique, x et y deux points de E , on introduit dans E une relation binaire donnée par:

$$x\ R\ y \longleftrightarrow \text{il existe un chemin qui lie } x \text{ et } y$$

. Montrer que c'est une relation d'équivalence, et les classes d'équivalences sont les composantes connexes.

Proposition 3.

Si f est une application continue d'un espace topologique connexe par arc E dans unespace toplogique F. Si f est srjective, alors F est connexe par arc.

Démonstration 5.

Soit l'application $f : E \longrightarrow F$ continue et surjective.

soient $y, y' \in F$, alors il existe $x, x' \in E$ tel que $y = f(x)$ et $y' = f(x')$ car f est surjective. Alors il existe un chemin $\mu : [0, 1] \longrightarrow E$ joignant x et x' dans E. μ est continue, $\mu(0) = x$ et $\mu(1) = x'$.

Alors le chemin joignant y et $y^{,}$ est $\eta = fo\mu : [0,1] \longrightarrow F$, car η est continue et $\eta(0) = (fo\mu)(0) = f(\mu(0)) = f(x) = y$ et $\eta(1) = (fo\mu)(1) = f(\mu(1)) = f(x^{,}) = y^{,}$.

Remarque 2.

1) *Si f est homéorphisme un espace topologique dans un autre, si l'un des deux est connexe par arc, alors l'autre est connexe par arc. (c'est adire que la connixité par arc est un invariant topologique).*

2) *Si E, F deux espaces topologiques, si l'un est connexe par arc et l'autre n'est pas connexe par arc. Alors ils ne sont pas homéomorphe.*

3) *Si $f : E \longrightarrow F$ une application continue où E, F deux espaces toplogiques. Si E est connexe par arc alors $f(E)$ est connexe par arc.*

Proposition 4.

Tout espace connexe par arc est connexe.

Démonstration 6.

suupposons que$X$ un espace topologique connexe par arc et soient $x, y \in X$ alors il exisite $\mu : [0,1] \longrightarrow E$ un chemin joignant x et y dans X donc $\mu([0,1])$ est une partie connexe dans X qui contient s et y d'après la caracterisation des espaces connexes on obtien que X est connexe.

2 La déformation d'un chemin fermé

La déformation d'un chemin fermé d'extremité et d'origine confondu est un cas particulier de la déformation de chemin d'extremités quelconques.

Si f un chemin d'origine x et d'extremité y, et g un autre chemin d'origine z et d'extremité t dans un espace topologique E.

Si f ce déforme en g continuement dans E, alors nous obtenons un rectangle culvilligne.

Don afin d'exprimer que f peut-être déformé en g, il est évident de définir une application de $[0,1] \times [0,1]$ dans E, qui applique le côté inferieur sur f et le côté superieur sur g.

2.1 Définition

Soient f, g deux chemins dans un espace topologique E. On dit que f est déformable continuement en g s'il existe une application continue F tel que:

$$F : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow E$$

avec: $\begin{cases} F(t,0) = f(t) & , \forall t \in [0,1] \\ F(t,1) = g(t) & , \forall t \in [0,1] \end{cases}$.

F s'appele l'homotopie joignant f à g.

Remarque 3.

Le cas où f est déformable continuement en g. on dit que f et g sont deux chemins homotopes.

2.2 Cas prticulier

Déformation continuement des chemins ayant extremités et origines confondu.

Définition 1. *soit μ un chemin de E espace topologique c'est-à-dire une application continue $\mu : [0,1] \longrightarrow E$. on dit que μ est un lacet si μ à l'extremité confondu avec l'origine.*

Remarque 4.

μ est un lacet c'est-à-dire une application continue $\mu : [0,1] \longrightarrow E$, et $\mu(0) = \mu(1) = x_0$.

On dit que μ est un lacet basé en x_0.

Définition 2.

Deux lacets μ_1 et μ_2 besés en x_0 dans un espace topologique E sont dits déformable continuement (ou homotopes) s'il existe F une application continue tel que:

$$F : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow E$$

avec: $$\begin{cases} F(t,0) = \mu_1(t) & , \forall t \in [0,1] \\ F(t,1) = \mu_2(t) & , \forall t \in [0,1] \\ F(0,s) = F(1,s) = x_0 & , \forall s \in [0,1]\ . \end{cases}$$

2.3 Première géneralisation

Etant donné qu'un chemin est une application continue de $[0,1]$ dans un espacetopologique.

En peut passé à l'homotopie des applications continues d'un espace topologique dans un autre.

Définition 3.

Soient f, g deux applications continues d'un espace toplogique E dans un autre F. On dit que f et g sont homotopes s'il existe une application continue F tel que:

$$F : E \times [0,1] \longrightarrow F$$

avec: $$\begin{cases} F(x,0) = f(t) & , \forall x \in E \\ F(x,1) = g(t) & , \forall x \in E\ . \end{cases}$$

Remarque 5.

La notion d'homotopie des applications continues est définie dans $C(E,F)$.

2.4 Deusième géneralisation

Définition 4.

Soient f et g deux chemins ayants le même origine x et même extremité y. On dit que f est déformable contonuement en g s'il exisite une application continue F tel que:

$$F : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow E$$

avec: $$\begin{cases} F(t,0) = f(t) & , \forall t \in [0,1] \\ F(t,1) = g(t) & , \forall t \in [0,1] \\ F(0,s) = x,\ F(1,s) = y & , \forall s \in [0,1]\ . \end{cases}$$

Définition 5.

Un espace topologique E est dit simplement connexe en $x_0 \in E$, si tout lacet basé en x_0 peut-être contacté en x_0 continuement.

E est dit simplement connexe s E est simplement connexe en tout points.

Remarque 6.

1) *Un lacet constant basé en x_0 est une application continue*

$$\xi : [0,1] \longrightarrow E$$
$$x \to \xi(t) = x_0 \ \forall t \in [0,1]$$

2) *Le lacet μ basé en x_0 est dit contractable en x_0 si et seulement si μ est homotope à ξ.*
C'est-à-dire: il existe une homotopie F tel que:

$$F : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow E \quad \textit{homotopie}$$

$$\textit{avec:} \begin{cases} F(t,0) = \mu(t) & , \forall t \in [0,1] \\ F(t,1) = \xi(t) = x_0 & , \forall t \in [0,1] \\ F(0,s) = F(1,s) = x_0 & , \forall s \in [0,1] \ . \end{cases}$$

2.5 Etude de l'homotopie des lacets

Considérons $\zeta(E, x_0)$ l'ensemble des lacets basés en x_0.

Proposition 5.

La relation binaire sur $\sim$ donnée par:

$$\mu_0 \sim \mu_1 \longleftrightarrow \mu_0 \ \textit{et} \ \mu_1 \ \textit{homotopes}$$

est une relation d'équivalence dans $\zeta(E, x_0)$.

Remarque 7.

La relation définie ci-dessus est appele reation d'homotopie.

C'est-à-dire si $\mu_0 \sim \mu_1$ sont dits homotopes.

$\mu_0 \sim \mu_1$ si et seulement si il existe une application continue F verifiant:

$$\begin{cases} F(t,0) = \mu_0(t) & , \forall t \in [0,1] \\ F(t,1) = \mu_1(t) & , \forall t \in [0,1] \\ F(0,s) = F(1,s) = x_0 & , \forall s \in [0,1] \ . \end{cases}$$

Démonstration 7. *(Proposition 5)*

- *Reflexivité:*
  Soit $\mu_0 \in \zeta(E, x_0)$. Considèrons l'application F donnée par:

$$F : [0,1]] \times [0,1] \longrightarrow E$$
$$(t,s) \to F(t,s) = \mu_0(t), \ \forall t \in [0,1]$$

- *Symétrie:*
  Soient $\mu_0, \mu_1 \in \zeta(E, x_0)$ et supposons que:
  $\mu_0 \sim \mu_1 \longleftrightarrow$ ilexiste $F : [0,1]] \times [0,1] \longrightarrow E$ tel que

$$\begin{cases} F(t,0) = \mu_0(t) & , \forall t \in [0,1] \\ F(t,1) = \mu_1(t) & , \forall t \in [0,1] \\ F(0,s) = F(1,s) = x_0 & , \forall s \in [0,1] \ . \end{cases}$$

Considèrons l'application $G : [0,1]] \times [0,1] \longrightarrow E$ donnée par:

$$G(t,s) = F(t, 1-s), \ \forall t, s \in [0,1]$$

G est continue car f est continue et on a:

$$\begin{cases} G(t,0)=F(t,1)=\mu_1(t) & ,\forall t\in[0,1] \\ G(t,1)=F(t,0)=\mu_0(t) & ,\forall t\in[0,1] \\ G(0,s)=F(0,1-s)=x_0 & ,\forall s\in[0,1] \\ G(1,s)=F(1,1-s)=x_0 & ,\forall s\in[0,1]\ . \end{cases}$$

Donc G construite est l'homotopie qui lie μ_1 à μ_0. C'est-à-dire $\mu_1\sim\mu_0$.

- *Transitivité:*

Soient μ_0,μ_1 et μ_2 trois lacets $\zeta(E,x_0)$ tel que:
$\begin{cases} \mu_0 & \sim\mu_1 \\ \mu_1 & \sim\mu_2 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} F_1:[0,1]]\times[0,1] & \longrightarrow E \\ F_2:[0,1]]\times[0,1] & \longrightarrow E \end{cases}$ *et*

$$\begin{cases} F_1(t,0)=\mu_0(t) & ,\forall t\in[0,1] \\ F_1(t,1)=\mu_1(t) & ,\forall t\in[0,1] \\ F_1(0,s)=F_1(1,s)=x_0 & ,\forall s\in[0,1] \\ F_2(t,0)=\mu_1(t) & ,\forall t\in[0,1] \\ F_2(t,1)=\mu_1(t) & ,\forall t\in[0,1] \\ F_2(0,s)=F_2(1,s)=x_0 & ,\forall s\in[0,1] \end{cases}$$

Considèrons alors l'application F donnée par:

$$F:[0,1]]\times[0,1]\longrightarrow E$$

et $F(t,s)=\begin{cases} F_1(t,2s) & 0\le t\le\frac{1}{2} \\ F_2(t,2s-1) & \frac{1}{2}\le t\le 1 \end{cases}$ *pour tout* $t\in[0,1]$. *F est continue d'après le théoréme de recollement et on a:*

$$\begin{cases} F(t,0)=F_1(t,0)=\mu_0(t) & ,\forall t\in[0,1] \\ F(t,1)=F_1(t,1)=\mu_2(t) & ,\forall t\in[0,1] \\ F(0,s)=F(1,s)=x_0 & ,\forall s\in[0,1] \end{cases}$$

Donc: $\mu_0\sim\mu_2$
Alors $\sim$ est une relation d"équivalence.

Remarque 8.

On obtient ainsi l'ensemble quotient $\zeta(E,x_0)/\sim$ noté $\Pi_1(E,x_0)$.

$\Pi_1(E,x_0)$ *s"appele l'ensemble fondamentale de Poincarés basé en x_0.*

Remarque 9.

$\zeta(E,x_0)$ *est l'ensemble des lecets dans E basés en x_0.*

$\mu_0\sim\mu_2$ *homotopes* $\longleftrightarrow \begin{cases} F:[0,1]]\times[0,1] & \longrightarrow E \text{ continue} \\ F(t,0)=\mu_0(t) & ,\forall t\in[0,1] \\ F(t,1)=\mu_1(t) & ,\forall t\in[0,1] \\ F(0,s)=F(1,s)=x_0 & ,\forall s\in[0,1] \end{cases}$

Analysons de plus près la notion d'homotopie pour s_0 donné dans $[0,1]$ on obtient l'application à variable t qui est $F(t,s_0)$ qu'on note $F_{s_0}:[0,1]\longrightarrow E$.

Ainsi lorsque s_0 parcourt $[0,1]$ on obtient une famille d' applications continues de $[0,1]$ dans E. D'où $\{F_s\}_{s\in[0,1]}\subset\ C(E,x_0)$.

De plus on a: $\begin{cases} s=0 & ,\ F_0(t)=\mu_0(t) \\ s=1 & ,\ F_1(t)=\mu_1(t) \end{cases}$

Consèquence 1.

F où $s \in [0,1]$ sont des lacets bases en x_0 d'après la continuité de $F : [0,1]] \longrightarrow E$ et $\begin{cases} s=0 & , F_0(t)=\mu_0(t) \\ s=1 & , F_1(t)=\mu_1(t) \end{cases}$ *de plus $\mu_0, \mu_1 \in \{F_s\}_{s\in[0,1]}$*
c'est équivalent à dire que $\{F_s\}_{s\in[0,1]} \subset \zeta(E,x_0) \subset C([0,1],E)$.
On peut montrer que l'application $G : [0,1]] \longrightarrow \zeta(E,x_0)$ donné par $G(s)=F_s,\ \forall s \in [0,1]$ est continue pour certaine topologie.